Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. №2(25)

УДК 519.62

© **В. Г. Пименов**
Vladimir.Pimenov@usu.ru

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, численные методы, интерполяция, запаздывание, опережение.

Abstract. General approach to constructing numerical methods for functional-differential equations is considered. The general approach consists of distinguishing the finite dimensional and infinite dimensional phase components. As an example, Runge-Kutta-like methods are described.

К настоящему времени разработано достаточно много алгоритмов численого решения начальной задачи для дифференциальных уравнений с запаздываниями различных видов (см. обзоры [1; 2; 3]). Предлагаемый мною общий подход к конструированию численных методов основан на идее разделения конечномерной и бесконечномерной составляющих в фазовой структуре функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) и интерполяции с заданными свойствами, состоящей во введении промежуточного элемента между изначально непрерывной (бесконечномерной) системой ФДУ и априори дискретной численной моделью. В качестве интерполяционных процедур предложена интерполяция вырожденными сплайнами и экстраполяция продолжением. Такой подход позволяет строить численные методы,

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 01-01-00576) и Конкурсным центром Министерства образования (грант Е 00-1.0-88).

являющиеся полными аналогами методов, известных для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), и на их основе создавать программное обеспечение для решения широкого класса задач моделирования систем с запаздыванием [4], в том числе и для решения задач управления такими системами.

Проиллюстрируем сказанное на примере явных методов типа Рунге-Кутты для задачи

$$\dot{x} = f(t, x(t), x_t(\cdot)),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x_{t_0}(\cdot) = \{y^0(s),\ -\tau \leqslant s < 0\}.$$

Здесь

$$x_t(\cdot) = \{x(t+s), -\tau \leqslant s < 0\}, \quad f\colon [t_0, t_0+\theta] \times \mathbb{R}^l \times Q[-\tau, 0) \to \mathbb{R}^l;$$

$\theta > 0$ — величина временного интервала, $\tau > 0$ — величина интервала запаздывания, $\mathbb{R}^l$ — l-мерное евклидово пространство; $Q[-\tau, 0)$ — пространство l-мерных кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ функций $y(\cdot)$, допускающих конечное число разрывов первого рода и непрерывных справа в точках разрыва.

Пусть $t_n = t_0 + n\Delta$, $n = 0, 1 \dots N$, $\Delta = \theta/N$, $\tau/\Delta = m$. Приближение точного решения $x(t_n) = x_n$ в точке t_n будем обозначать через $u_n \in \mathbb{R}^l$. Дискретной предысторией модели в момент t_n назовем множество $\{u_i\}_n = \{u_i \in \mathbb{R}^l,\ n-m \leqslant i \leqslant n\}$. Оператором интерполирования I дискретной предыстории модели назовем отображение $I\colon \{u_i\}_n \to u(\cdot) \in Q[t_n - \tau, t_n]$. Для любого $a > 0$ оператором экстраполирования E предыстории модели назовем отображение $E\colon \{u_i\}_n \to u(\cdot) \in Q[t_n, t_n + a\Delta]$.

Назовем k-этапным явным методом типа Рунге-Кутты — ЯРК (с интерполяцией I и экстраполяцией E) численную модель вида

$$u_0 = x_0, \quad u_{n+1} = u_n + \Delta \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\ h_i(u_n, u_{t_n}(\cdot)), \quad n = 0 \dots N-1,$$

$$h_1(u_n, u_{t_n}(\cdot)) = f(t_n, u_n, u_{t_n}(\cdot)),$$

$$h_i(u_n, u_{t_n}(\cdot)) = f(t_n + a_i\Delta, u_n + \Delta \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} h_j(u_n, u_{t_n}(\cdot)), u_{t_n + a_i\Delta}(\cdot)).$$

Здесь предыстория модели определяется соотношениями

$$u_t(s) = \begin{cases} y^0(t+s-t_0) & \text{при} \quad t+s<t_0, \\ I(\{u_i\}_n) & \text{при} \quad t_n-\tau \leqslant t+s<t_n, \\ E(\{u_i\}_n) & \text{при} \quad t_n \leqslant t+s \leqslant t_n + a\Delta. \end{cases}$$

Следующее утверждение устанавливает достаточные условия порядка сходимости.

Т е о р е м а 1. [5, 6]. *Если ЯРК-метод имеет невязку порядка* $p_1 > 0$, *интерполяция предыстории модели имеет порядок* $p_2 > 0$, *экстраполяция предыстории модели имеет порядок* $p_3 > 0$, *то метод сходится, причем порядок сходимости ЯРК-метода* p *не меньше минимума из чисел* p_1, p_2, p_3.

Отметим, что в рамках общей линейной схемы численного решения ФДУ можно получить также необходимые и достаточные условия порядка сходимости [7].

В настоящее время на основании этого подхода разрабатываются численные методы решения краевых задач для ФДУ запаздывающего, а также опережающего и опережающе-запаздывающего типов. При этом существенно используется трактовка решений ФДУ, предложенная Н. В. Азбелевым [8].

Возникающие для этих задач алгоритмы значительно отличаются от известных для ОДУ. Так, при реализации простейших дискретных схем для задачи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + C(t)x(t+\tau) + D(t), \quad t \in [a,b],$$

$$x(t) = \varphi(t), \ t \in [a-\tau, a), \quad x(t) = \psi(t), \ t \in (b, b+\tau], \quad x(a) = x_0$$

возникает задача решения линейных систем большой размерности определенной структуры (с четырехдиагональной матрицей). Отметим, что приведенная задача опережающе-запаздывающего типа возникает при применении принципа максимума Л. С. Понтрягина к линейно-квадратичной задаче оптимального управления для систем с запаздыванием и по этой причине вызывает повышенный интерес.

Список литературы

1. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
2. Bellen A. Constrained mesh methods for functional differential equations // International Series of Numerical Mathematics. Verlag. Basel, 1985. P. 52–70.
3. Baker C. T. H., Paul C. A. H., Wille D. R. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations // Advances in Comput. Math. 1995. Vol. 3. P. 171–196.
4. Kwon W. H., Kim A. V., Pimenov V. G., Lozhnikov A. B., Han S. H., Onegova O. V. Time-Delay System Toolbox (for use with MATLAB). Beta Version. Seoul National University. Seoul, 1998. 114 p.
5. Ким А. В., Пименов В. Г. О применении i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 104–126.
6. Пименов В. Г. Функционально-дифференциальные уравнения: численные методы. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1998. 80 с.
7. Пименов В. Г. Общие линейные методы численного решения дифференциально-функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, Ґ 1. С. 105–114.
8. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.