Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ѓ2(25)

УДК 517.9

© **В. И. Родионов**
rodionov@uni.udm.ru

АБСТРАКТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕРЫВИСТЫХ ФУНКЦИЙ

Ключевые слова: абстрактное дифференциальное уравнение, обобщенная функция, интегралы Лебега, Римана–Стилтьеса.

Abstract. Concepts of the regulated distribution and its derivative are defined. The solvability of abstract differential equation on the space of regulated distributions is investigated.

1. Прерывистые функции, заданные на отрезке. Зафиксируем отрезок $K = [a,b]$ и через $\mathrm{G} = \mathrm{G}[a,b]$ обозначим пространство прерывистых функций, т. е. комплекснозначных функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0) = \lim\limits_{\tau \to t-0} x(\tau)$ при всех $t \in (a,b]$ и $x(t+0) = \lim\limits_{\tau \to t+0} x(\tau)$ при всех $t \in [a,b)$. Через G_L обозначим подпространство в G, состоящее из таких функций, что $x(t-0) = x(t)$ при всех $t \in (a,b]$. Симметричное подпространство G_R состоит из функций таких, что $x(t+0) = x(t)$ при всех $t \in [a,b)$. Функции из G_L будем называть непрерывными слева, а функции из G_R — непрерывными справа прерывистыми функциями. Через G_0 обозначим пространство таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in K : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ конечно.

Для прерывистых функций справедлив следующий критерий: $x \in \mathrm{G}[a,b]$ тогда и только тогда, когда x является равномерным пределом последовательности ступенчатых (кусочно-постоянных) функций. Приведем другие свойства комплекснозначных прерывистых функций, заданных на отрезке.

1. Множество точек разрыва функции $x \in \mathrm{G}$ не более чем счетно.

2. Равномерный предел последовательности прерывистых функций есть функция прерывистая.

3. Любая прерывистая функция ограничена, а пространство $\mathrm{G}[a,b]$ банахово по норме $\|x\| = \sup\limits_{t\in K}|x(t)|$ (является банаховой алгеброй).

4. Если $x : K \to \mathbb{C}$ — кусочно непрерывная функция, то $x \in \mathrm{G}[a,b]$.

5. Если функция $x : K \to \mathbb{C}$ имеет ограниченное изменение, т. е. $x \in \mathrm{BV}[a,b]$, то $x \in \mathrm{G}[a,b]$.

6. Если $x \in \mathrm{G}[a,b]$, то x интегрируема на $[a,b]$ (по Риману). Более того, если $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$, т. е. y — непрерывная функция ограниченной вариации, то для любых $\alpha, \beta \in K$ существует интеграл Римана – Стилтьеса $\int_\alpha^\beta x\,dy$. Кроме того, если $z(t) = \int_\alpha^t x\,dy$, то $z \in \mathrm{CBV}[a,b]$. Таким образом,

$$\mathrm{AC} \subset \mathrm{CBV} \subset \mathrm{BV} \subset \mathrm{G} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{L}, \tag{1}$$

где AC, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ — пространства абсолютно непрерывных, интегрируемых по Риману и интегрируемых по Лебегу функций соответственно. Отметим, что все включения в диаграмме (1) строгие.

Действительно, пусть $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(0) = 0$, $x(t) = t\{1/t\}$ при $t \neq 0$ (выражение $\{\sigma\}$ обозначает дробную часть числа σ). На каждом полуинтервале $(1/(k+1), 1/k]$, $k = 1, 2, \ldots$ имеем $x(t) = 1 - kt$, следовательно, x разрывна в точках $\tau_k = 1/(k+1)$ и имеет неограниченное изменение (т. к. скачки функции образуют гармонический ряд). Таким образом, $x \in \mathrm{G}[0,1]$, однако $x \notin \mathrm{BV}[0,1]$.

Пусть $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(0) = 0$, $x(t) = (-1)^{[1/t]}$ при $t \neq 0$ (выражение $[\sigma]$ обозначает целую часть числа σ). На каждом полуинтервале $t \in (1/(k+1), 1/k]$, $k = 1, 2, \ldots$ имеем $x(t) = (-1)^k$, следовательно, функция x разрывна в нуле и в точках $\tau_k = 1/(k+1)$. Таким образом, $x \in \mathcal{R}[0,1]$, но $x \notin \mathrm{G}[0,1]$ (т. к. предел $x(0+0)$ не существует).

Примером прерывистой функции из G_0 служит функция Римана, т.е. функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $x = 1/n$ в каждой не равной нулю рациональной точке $r = m/n$ ($m \neq 0$), где m/n — несократимая рациональная дробь, и $x = 0$ во всех остальных точках отрезка $[0,1]$.

7. Если $x \in \mathrm{G}_0$, $y \in \mathrm{G}$, то $xy = yx \in \mathrm{G}_0$, следовательно, G_0 является двусторонним идеалом в G. Если функции $x, y \in \mathrm{G}$ считать эквивалентными ($x \sim y$) при $x - y \in \mathrm{G}_0$, то $\mathrm{G}_L \approx \mathrm{G}/\mathrm{G}_0 \approx \mathrm{G}_R$. Другими словами, в каждом классе эквивалентности имеется ровно одна непрерывная слева и ровно одна непрерывная справа прерывистые функции.

2. Обобщенные прерывистые функции. Зафиксируем интервал $K = (a,b)$ (ограниченный или неограниченный) и через $\mathrm{G} = \mathrm{G}(a,b)$ обозначим пространство прерывистых функций, т.е. функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0)$ и $x(t+0)$ при всех $t \in K$. Через G_L обозначим подпространство в G, состоящее из непрерывных слева прерывистых функций. Аналогично определяется пространство G_R непрерывных справа прерывистых функций. Через $\mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ обозначим пространство таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что $x \in \mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$ для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$. Диаграмма (1) принимает вид:

$$\mathrm{AC}^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{G} \subset \mathcal{R}^{\mathrm{loc}} \subset \mathcal{L}^{\mathrm{loc}}.$$

Пространство $D = D(a,b)$, состоящее из финитных функций пространства $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(a,b)$, будем называть пространством основных функций. В нем определено понятие сходящейся последовательности: будем говорить, что последовательность основных функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D$ сходится к основной функции $\varphi \in D$ (и писать $\varphi_n \overset{D}{\to} \varphi$), если у всех функций φ_n и φ есть общий носитель $[\alpha,\beta] \subset K$ и $\operatorname*{Var}_{[\alpha,\beta]}(\varphi_n - \varphi) \underset{n}{\to} 0$. Через D' обозначим пространство линейных непрерывных функционалов $l : D(a,b) \to \mathbb{C}$ (непрерывность означает, что из сходимости последовательности основных функций $\varphi_n \overset{D}{\to} \varphi$ следует сходимость $(l,\varphi_n) \underset{n}{\to} (l,\varphi)$), а его элементы назовем обобщенными функциями. Всякая (обычная) функция $x \in \mathcal{L}^{\mathrm{loc}}$ порождает обобщенную функцию $l_x \in D'$: $(l_x,\varphi) = \int_K \varphi(t)x(t)\,dt$, причем если $x \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, то x почти всюду дифференцируема, $\dot{x} \in \mathcal{L}^{\mathrm{loc}}$ и выполнены равенства $x(t) = x(\alpha) + \int_\alpha^t \dot{x}(s)\,ds$ при всех $\alpha, t \in K$, $\int_K \varphi\,dx = \int_K \varphi(t)\,d\Big(x(\alpha) + \int_\alpha^t \dot{x}(s)\,ds\Big) = \int_K \varphi(t)\dot{x}(t)\,dt = (l_{\dot{x}},\varphi)$. Интеграл $\int_K \varphi\,dx$ существует не только для $x \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}(a,b)$, но и для произвольной прерывистой функции $x \in \mathrm{G}(a,b)$, и это наблюдение дает нам основание ввести следующее обозначение: $(l_{\dot{x}},\varphi) = \int_K \varphi\,dx,\ \ x \in \mathrm{G}$. Более того, мы отождествляем обычные и обобщенные функции (т.е. x и l_x) и используем для прерывистых функций $x \in \mathrm{G}(a,b)$ обозначения

$$(x,\varphi) = \int_K \varphi(t)x(t)\,dt, \qquad (\dot{x},\varphi) = \int_K \varphi\,dx, \tag{2}$$

называя функционалы (2) соответственно обобщенной прерывистой функцией и обобщенной производной прерывистой функции.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $x \in \mathrm{G}(a,b)$ *. Для того чтобы равенство* $(\dot{x},\varphi) = 0$ *было выполнено при всех* $\varphi \in D$ *, необходимо и достаточно, чтобы* $x \sim \mathrm{const}$ *.*

Другими словами, функции вида $x(t) = C + x_0(t)$, $C \in \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$ и только они являются решениями уравнения $\dot{x} = 0$. Теорема 1 применима при решении абстрактных дифференциальных уравнений, заданных в терминах обобщенных прерывистых функций: произвольный оператор $F : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ порождает уравнение $\dot{x} = Fx$, т.е. $(\dot{x},\varphi) = (Fx,\varphi)$ при всех $\varphi \in D$. В соответствии с утверждением теоремы тождество $0 \equiv (\dot{x},\varphi) - (Fx,\varphi) = \int_K \varphi(t)\,d\Big(x(t) - \int_\alpha^t (Fx)(s)\,ds\Big)$ эквивалентно совокупности уравнений $x(t) - \int_\alpha^t (Fx)(s)\,ds = C + x_0(t)$ с произвольными параметрами $\alpha \in K,\ C \in \mathbb{C},\ x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Например, если $Fx = x$, то $x(t) \sim Ce^t$, где C — произвольная постоянная.