УДК 519.615

© **Н. А. Рычина**
pmi@istu.udm.ru

О ДОПУСТИМЫХ ЗОНАХ ПОЛОЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ В ПОЛЮСНОМ МЕТОДЕ СЕКУЩИХ

Ключевые слова: скалярное уравнение, полюсный метод секущих, допустимые значения параметров, сходимость.

Abstract. The method of secants improvement is considered. The introduction of pole coordinate parameters allows polar secant method to be obtained. The analysis of the rules of parameter fixing, selection of obtarting approximations has been performed. The estimation of velocity of convergence has been obtained.

Как известно, из двух популярных методов решения нелинейных скалярных уравнений

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

— метода Ньютона и метода секущих — более эффективным в смысле вычислительных затрат является последний. На основе метода секущих построена модификация, названная полюсным методом секущих, которая определяется итерационной формулой

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f_k}{\dfrac{f_{k-1} - f_k}{x_{k-1} - x_k} - \dfrac{d}{c - x_k}}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Основная проблема — каким образом выбирать координаты полюса $P(c, d)$, чтобы при заданных начальных точках x_0, x_1 гарантировалась сходимость последовательности (x_k) к корню x^* уравнения (1).

Рассмотрим частный случай. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и известны знаки $f'(x)$, $f''(x)$: $f'(x)>0$, $f''(x)>0$. Будем считать для определенности, что $x^* < x < x_0$. Через точки (x_0,f_0), (x_1,f_1) проведем секущую, а затем через точку $(x_1,0)$ проведем прямую, параллельную секущей. В результате выделяется часть плоскости, в которой можно выбирать полюс $P(c,d)$, и при этом полюсная прямая, проходящая через точки $(x_1,0)$, $P(c,d)$, будет давать лучшее приближение к корню x^*, чем классический метод секущих. Приближением полюсного метода секущих будем считать точку x_2 — абсциссу точки пересечения секущей и полюсной прямой. В данном случае зона допустимых значений на выбор координат полюса определена следующим образом: это все точки, которые лежат ниже прямой, параллельной секущей, проходящей через точку $(x_1,0)$ и выше оси Ox. Если зафиксировать $c=x_0$, то параметр d в данном случае может принимать значения от 0 до f_0-f_1. Эксперименты показывают, что если изменять d от шага к шагу по формуле $d=d_k=0.5(f_{k-1}-f_k)$, то такая модификация полюсного метода секущих может иметь двухшагово квадратичную скорость сходимости.

Т е о р е м а 1. *Пусть x^* — корень уравнения* (1), *и при некотором $\rho>0$ на промежутке $[x^*-\rho,x^*+\rho]$ выполняются условия: $0<m\leqslant|f'(x)|\leqslant M<\infty$, $|f''(x)|\leqslant L<\infty$. Тогда в предположении, что все элементы последовательности (x_k), определяемые полюсным методом секущих* (2) *при $c=x_0$, $d=d_k=0.5(f_{k-1}-f_k)$ (включая начальные точки x_0 и x_1), принадлежат промежутку $[x^*-\rho,x^*+\rho]$, имеет место сходимость последовательности (x_k) к корню x^* с быстротой сходимости, характеризуемой неравенством*

$$|x^*-x_{k+1}|\leqslant\frac{2M+3\rho L}{2m|x_0-x_1|}\,|x^*-x_k|\cdot|x^*-x_{k-1}|.$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи комбинации знаков $f'(x)$ и $f''(x)$ и взаимного положения точек x_0, x_1, x^*.