Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. №2(25)

УДК 519.21

© **А. В. Чистяков**
chis@uni.udm.ru

ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ОСИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО

Ключевые слова: стохастические уравнения, устойчивость, ограниченные решения.

Abstract. Main result is that for linear systems of Ito differential equations $dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)x(t)w(dt) + f(t)dt, \quad t \in \mathbb{R}$, the bounded (in mean) solution problem is solvable for any bounded $f(t)$ only if the system is exponentially stable.

Рассмотрим линейную систему уравнений Ито

$$dx(t) = A(t)x(t)\,dt + B(t)x(t)w(dt) + f(t)\,dt, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $n \times n$-матричные процессы $A(t)$, $B(t)$ и n-мерный процесс $f(t)$ согласованы с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, порожденным на исходном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ скалярной винеровской мерой $w(dt)$. Винеровской мерой называется стохастическая мера на $\mathbb{R}$, такая, что при всех $s \in \mathbb{R}$ случайный процесс $w_s(t) = w([s,t))$, $t \geqslant s$ является стандартным броуновским движением на полуоси $[s, \infty)$.

Для нормировки случайных величин ϕ со значениями в конечномерных нормированных пространствах зафиксируем число $p \in [1, \infty)$ и положим $|\phi| = \big(\mathbf{E}\|\phi\|^p\big)^{1/p}$. Случайный процесс $x(t)$ будем называть ограниченным, если $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| < \infty$. Соответственно, процесс $f(t)$ будем называть интегрально ограниченным, если $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \big| \int_t^{t+1} \|f(\tau)\|\,d\tau \big| < \infty$.

При условиях

a) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \operatorname*{vraisup}\limits_{\omega\in\Omega} \int_t^{t+\delta} \|A(\tau)\|\, d\tau \underset{\delta\to 0+}{\longrightarrow} 0\,;$

b) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \operatorname*{vraisup}\limits_{\omega\in\Omega} (\int_t^{t+\delta} \|B(\tau)\|^2\, d\tau)^{1/2} \underset{\delta\to 0+}{\longrightarrow} 0$

задача Коши

$$dx(t) = A(t)x(t)\,dt + B(t)x(t)\,dw_s(t) + f(t)\,dt, \quad t > s,$$

$$x(s) = x_s$$

имеет единственное решение для всех $\mathcal{F}_s$-измеримых начальных значений x_s и всех $\mathcal{F}_t$-согласованных возмущений $f(t)$. Если $|x_s| < \infty$ и $|\int_s^t \|f(\tau)\|\, d\tau| < \infty$ при $t > s$, то решение задачи Коши определено на полуоси $t \in [s,\infty)$ и удовлетворяет оценке

$$|\max_{\tau\in[t,t+1]} \|x(\tau)\|\,| \leqslant c(|x_s| + \max_{t'\in[s,t]} |\int_{t'}^{t'+1} \|f(\tau)\|\, d\tau|),$$

где константа c определяется только длиной интервала $[s,t]$ и параметрами уравнения (1). Задача Коши называется однородной, если $f = 0$.

Уравнение (1) называется равномерно экспоненциально устойчивым, если существуют константы $C > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что при всех $s \in \mathbb{R}$ для любого решения однородной задачи Коши справедлива оценка

$$|x(t)| \leqslant Ce^{-\alpha(t-s)}|x_s|, \quad t > s.$$

Решением уравнения (1) называется $\mathcal{F}_t$-согласованный случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такой, что при каждом $s \in \mathbb{R}$ ограничение $x(t)$ на полуось $[s,\infty)$ является решением задачи Коши.

Т е о р е м а 1. *Уравнение* (1) *имеет точно одно ограниченное решение* $x(t)$ *при каждом интегрально ограниченном возмущении* $f(t)$ *тогда и только тогда, когда это уравнение равномерно экспоненциально устойчиво.*