Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ґ2(25)

УДК 517.929

© **К. М. Чудинов**
gchudinova@permoil.ru

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, устойчивость по части переменных.

Abstract. The asymptotical partial stability problem for a solution of a differential-difference equation with a constant matrix is considered. It is reduced to the analysis of situation of zeros of a polynomial defined by the system matrix. This polynomial can be constructed effectively.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциально-разностного уравнения

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t-\omega),\ t \in \mathbf{R}_+, \\ \mathbf{x}(\xi) = 0,\ \xi \in [-\omega, 0), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ — комплексная $n \times n$-матрица, $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{C}^n$ и $\omega > 0$. В соответствии с [1] решением задачи (1) будем называть вектор-функцию $\mathbf{x}$ с абсолютно непрерывными на каждом конечном отрезке $[0, b]$ компонентами $x_i : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}$, удовлетворяющую (1) почти всюду.

Определим функциональную последовательность

$$\mathbf{x}(m\omega + \tau) = \mathbf{x}_m(\tau),\ \tau \in [0, \omega],\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

и ее производящую функцию

$$\mathbf{F}(z, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{x}_m(\tau) z^m. \tag{2}$$

Из (1) получаем, что $\mathbf{F}(z,\tau)$ является решением следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \mathbf{F}_\tau(z,\tau) = z\mathbf{A}\mathbf{F}(z,\tau), \\ \mathbf{F}(z,0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Компонента $x_i(t)$ решения $\mathbf{x}(t)$ системы (1) тогда и только тогда асимптотически устойчива при любом $\mathbf{x}_0$, когда при всех $\tau \in [0,\omega]$ радиус сходимости i-й компоненты ряда (2) больше 1. Последнее условие равносильно следующему: если λ_0 — корень характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ матрицы $\mathbf{A}$, а уравнение

$$z\exp(\omega\lambda_0 z) = 1$$

имеет нули в круге $|z| \leqslant 1$, то у собственных и присоединенных векторов [2], соответствующих λ_0, i-я компонента равна 0.

Пусть $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим через $d_I(\lambda)$ наибольший общий делитель всех многочленов, являющихся определителями $(n-k)$-матриц-функций от λ, получаемых отбрасыванием от $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ всех столбцов с номерами из I и некоторых k строк. При этом многочлен $d_I(\lambda)$ является делителем многочлена $\delta(\lambda) = \Delta(\lambda)/d_I(\lambda)$.

Т е о р е м а 1. *Все соответствующие корню λ_0 многочлена $\Delta(\lambda)$ собственные и присоединенные векторы тогда и только тогда имеют равными 0 все компоненты с номерами из множества I, когда λ_0 не является корнем многочлена $\delta(\lambda)$.*

В работе [3] установлено, что уравнение

$$z\exp(pz) = 1$$

не имеет корней в круге $|z| \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда

$$p \in D = \{z : |z| < |\arg z| - \pi/2\}.$$

С учетом этого результата из теоремы 1 получаем следующий критерий.

Т е о р е м а 2. *Чтобы система* (1) *была асимптотически устойчива по компонентам* x_i, *где* $i \in I$, *необходимо и достаточно, чтобы для всех корней* λ_j *многочлена* $\delta(\lambda)$ *выполнялись условия* $\lambda_j \omega \in D$.

В случае нулевого запаздывания из теоремы 1 следует

Т е о р е м а 3. *Чтобы система*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \ t \in \mathbf{R}_+, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

была асимптотически устойчива по компонентам x_i, *где* $i \in I$, *необходимо и достаточно, чтобы все корни многочлена* $\delta(\lambda)$ *имели отрицательные вещественные части.*

В отличие от известных критериев устойчивости по части переменных (см., например, [4, §1.1, §6.2]), теоремы 2 и 3 не требуют построения вспомогательной системы, а сразу сводят задачу к исследованию корней многочлена $\delta(\lambda)$.

С л е д с т в и е 1. *Если найдется такое множество* $J \subseteq I$, *что кратности всех корней многочлена* $d_J(\lambda)$ *соответственно меньше кратностей тех же корней многочлена* $\Delta(\lambda)$ (*в частности,* $d_J(\lambda) = 1$), *то система* (1) *асимптотически устойчива или неустойчива по всем переменным* $x_j, j \in J$ *тогда и только тогда, когда она асимптотически соответственно устойчива или неустойчива по всем переменным.*

П р и м е р 1. Пусть

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 & -1 \\ -1,5 & -0,5 & -1,5 \\ -1,5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\Delta(\lambda) = -2(\lambda + 1,5)(\lambda + 0,5)(\lambda - 1).$$

При $I = \{1\}$

$$d_I(\lambda) = 1 - \lambda, \ \delta(\lambda) = 2(\lambda + 1,5)(\lambda + 0,5).$$

В силу теоремы 2 первая компонента решения задачи (1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда

$$0 < \omega < \pi/3.$$

Используя следствие, нетрудно установить, что вторая и третья компоненты решения неустойчивы ни при каком ω . Аналогично, в силу теоремы 3, первая компонента решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с матрицей $\mathbf{A}$ асимптотически устойчива, а вторая и третья компоненты — неустойчивы.

Список литературы

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974. 296 с.
3. Рехлицкий З. И. Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. 1956. Т. 111, Ѓ 1. С. 29–32.
4. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.